2022 年高三年级一轮复习阶段性成果调研卷（新高考地区）

数 学 试 卷 【解 析 版】

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、单选题

1．定义：当 $x\in Z, y\in Z$ 时，$P(x,y)$ 成为“格点”，则集合 $\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\le 2\}$ 对应的图形有（　　）格点

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

【来源】宁夏银川唐徕回民中学 2021 届高三一模数学（理）试题

【答案】C

【分析】

由条件可得则 $y^2\le 2-x^2$，所以 $2-x^2\ge 0$，即 x 的取值为 $-1,0,1$，分别讨论 x 的取值，求得 y 的值，从而得到答案.

【详解】

由当 $x\in Z, y\in Z$，$x^2+y^2\le 2$

则 $y^2\le 2-x^2$，所以 $2-x^2\ge 0$，得到 $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$，所以 x 的取值为 $-1,0,1$

所以当 $x=-1$ 时，y 的值为：$-1,0,1$

当 $x=0$ 时，y 的值为：$-1,0,1$

当 $x=1$ 时，y 的值为：$-1,0,1$

所以满足条件的点有 9 个

故选：C

2．从 2020 年开始，国家逐步推行全新高考制度，新高考不分文理科，采用“3+3”模式，其中语文、数学、外语三科为必考科目，另外考生还要依据想考取的高校及专业的要求，结合自己的兴趣爱好等因素，在政治、历史、地理、物理、化学、生物 6 门科目中自选 3 门参加考试，则甲，乙两人在六门自选科目中至少有两科相同的选法的种数为(　　)

A．180　　B．200　　C．220　　D．360

【来源】安徽省六安市舒城中学、安庆市太湖中学 2020-2021 学年高二下学期期中联考理科数学试题

【答案】B

【分析】

甲，乙两人在六门自选科目中至少有两科相同，可分三科完全相同和只有两科完全相同两种情况，三科完全相同的选法为 $C_6^3=20$ 种，只有两科完全相同的选法利用分步乘法计算原理求解.

【详解】

由题知，甲，乙两人在六门自选科目中选的三科都相同的选法的种数为 $C_6^3=20$；

甲，乙两人在六门自选科目中只有两科相同的选法可以分两步进行：

第一步：甲在六门自选科目中任意选三科，有 $C_6^3=20$ 种选法；

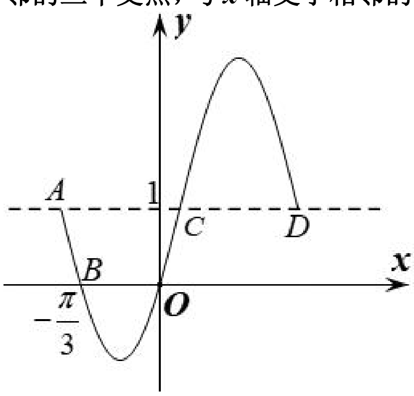
第二步：乙在甲选的三科中任选两科，在甲未选的三科中任选一科，有 $C_3^2C_3^1=9$ 种选法.

由分步乘法计算原理知，共有 $20\times 9=180$.

所以甲，乙两人在六门自选科目中至少有两科相同的选法的种数为 $20+180=200$ 种.

故选：B.

3．已知 $\omega>0$ 且为整数，且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1$ 的图像如图所示，A、C，D 是 $f(x)$ 的图像与 $y=1$ 相邻的三个交点，与 x 轴交于相邻的两个交点 O、B，若在区间 (a,b) 上，$f(x)$ 有 2020 个零点，则 $b-a$ 的最大值为(　　)



A．2020π　　B．$\dfrac{3034\pi}{3}$

C．$\dfrac{3032\pi}{3}$　　D．1012π

【来源】河南省洛阳市孟津县第一高级中学2021届高三下学期4月文科数学调研试题

【答案】C

【分析】

由$|OB|<\dfrac{T}{2}$求得ω的范围，由$f(0)=0$求得φ，再利用$f(-\dfrac{\pi}{3})=0$求得ω，得周期T，结合周期可得最大值.

【详解】

由题意则$|AC|$为$\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{\omega}$，则有$|OB|=\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{\omega}\Rightarrow 0<\omega<3$，进而$f(0)=2\sin(\omega\cdot 0+\varphi)+1=0\Rightarrow\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$，

又$2\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\cdot\omega-\dfrac{\pi}{6}\right)+1=0\Rightarrow\omega=-6k$或$-6k-4$，因为大于0小于3，所以$\omega$等于2，与$0<\omega<3$，得：$\omega=2$，则$T=\pi$，

相邻2个零点的距离有两种$\dfrac{\pi}{3}$和$\dfrac{2\pi}{3}$，则当$b-a$为1010个$\dfrac{\pi}{3}$与1011个$\dfrac{2\pi}{3}$的和时最大为$\dfrac{3032\pi}{3}$.

故选：C.

4．已知：①　函数　$f(x)=x-\sin x$有且仅有一个零点；②　在$\triangle ABC$中，若$A>B$，则$\sin A>\sin B$；③抛物线$C:y=ax^2$的焦点坐标为$\left(0,\dfrac{a}{4}\right)$；④不等式$2\ln x\le x^2-1\,(x>0)$恒成立，则上面结论错误的序号为（　　）

A．①　　B．②　　C．③　　D．④

【来源】浙江省浙北G2（嘉兴一中、湖州中学）2020-2021学年高二下学期期中联考数学试题

【答案】C

【分析】

利用导数求得函数$f(x)$在R上递增，且$f(0)=0$，可判定①正确；由正弦定理和三角形的性质，可判定②正确；根据抛物线的几何性质，可判定③错误；构造$g(x)=x^2-1-2\ln x$，利用导数求得单调性与最值，可判定④正确.

【详解】

对于①中，函数$f(x)=x-\sin x$，可得$f'(x)=1-\cos x\ge 0$，所以函数$f(x)$在R上递增，

又由$f(0)=0$，所以函数$f(x)=x-\sin x$有且仅有一个零点，所以①正确；

对于②中，在$\triangle ABC$中，由$A>B$，可得$a>b$，由正弦定理，可得$2R\sin A>2R\sin B$，$\sin A>\sin B$，所以②正确；

对于③中，抛物线$C:y=ax^2$的焦点坐标为$\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$，所以③错误；

对于④中，令$g(x)=x^2-1-2\ln x,x>0$，可得$g'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x+1)(x-1)}{x}$，

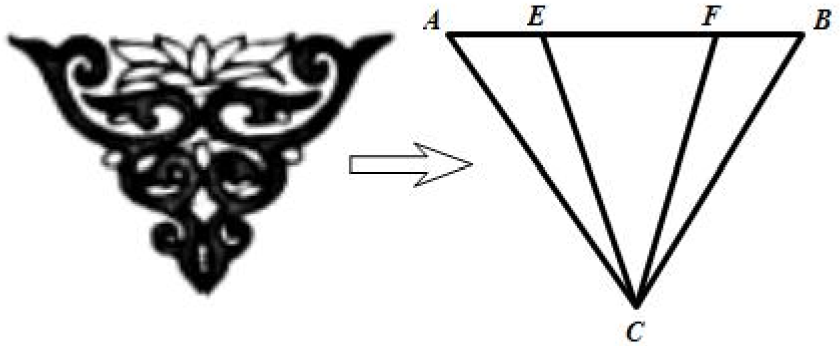
当$x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

所以$g(x)_{\min}=g(1)=0$，可得$g(x)\ge 0$，即不等式$2\ln x\le x^2-1\,(x>0)$恒成立，所以④正确.

故选：C.

5．小华在学习绘画时，对古典装饰图案产生了浓厚的兴趣，拟以矢量图（也称为面向对象的图象或绘图图象，在数学上定义为一系列由线连接的点，是根据几何特性绘制的图形）的模式精细地素描以下古典装饰图案，经过研究，小华发现该图案可以看成是一个边长为4的等边三角形*ABC*，如图，上边中间莲花形的两端恰好都是*AB*边的四等分点（*E*、*F*点），则$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=$（　　）



A．9 **B．16** **C．12** **D．11**

【来源】全国 2021 届高三高考数学模拟试题（样卷二）

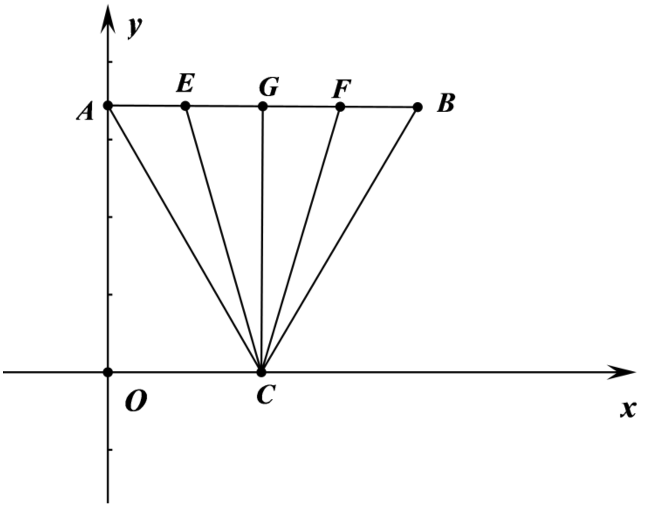
【答案】D

【分析】

建立直角坐标系求解

【详解】

过 C 作 $CG\perp AB$ 垂足为 G，如图建立直角坐标系



$\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形,

$AG=4\cos 60^{\circ}=2,\quad CG=4\sin 60^{\circ}=2\sqrt{3},C(2,0),A(0,2\sqrt{3})$，

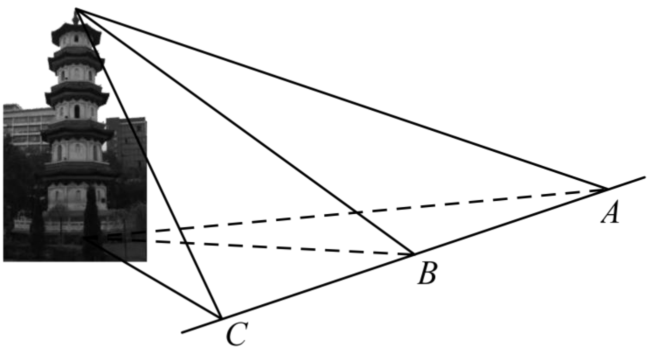
因为E,F是四等分点，所以 $E(1,2\sqrt{3}),\quad F(3,2\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{CE}=(-1,2\sqrt{3}),\quad \overrightarrow{CF}=(1,2\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=-1\times1+2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=11$.

故选：D.

6．鄂州十景之一“二宝塔”中的文星塔位于文星路与南浦路交汇处，至今四百六十多年的历史，该塔为八角五层楼阁式砖木混合结构塔.现在在塔底共线三点 A 、B 、C **处分别测塔顶的仰角为**30°、45°、60°**，且** $AB=BC=\frac{70\sqrt{6}}{9}$ **米，则文星塔高为（　　）**



A． 20 米 **B．** $\frac{70}{3}$ 米

C． $\frac{80}{3}$ 米 **D．** 30 米

【来源】湖北省鄂州市 2020-2021 学年高一下学期期末数学试题

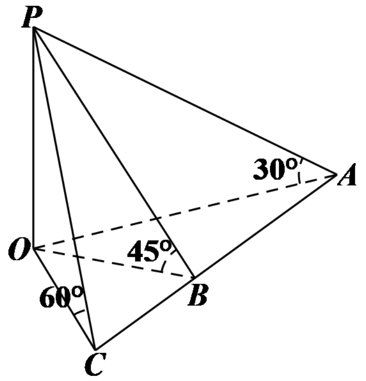
【答案】B

【分析】

设建筑物的高为 $PO=h\text{m}$，用 h 表示 PA 、PB 、PC ，利用 $\cos\angle PBA+\cos\angle PBC=0$ 结合余弦定理求出 h 的值，即可得解.

【详解】

如下图所示：



设建筑物的高为$PO=h$m，则$PA=\dfrac{h}{\sin 30^\circ}=2h$，$PB=\dfrac{h}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2}h$，$PC=\dfrac{h}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}h$，

由余弦定理可得$\cos\angle PBA=\dfrac{PB^2+AB^2-PA^2}{2PB\cdot AB}=\dfrac{AB^2-2h^2}{2AB\times\sqrt{2}h}$，

$\cos\angle PBC=\dfrac{PB^2+BC^2-PC^2}{2PB\cdot BC}=\dfrac{\frac{2}{3}h^2+AB^2}{2\sqrt{2}h\times AB}$，

因为$\angle PBA+\angle PBC=\pi$，故$\cos\angle PBA+\cos\angle PBC=\cos\angle PBA+\cos(\pi-\angle PBA)=0$，

即$\dfrac{AB^2-2h^2}{2AB\times\sqrt{2}h}+\dfrac{\frac{2}{3}h^2+AB^2}{2\sqrt{2}h\times AB}=0$，可得$h=\dfrac{\sqrt{6}}{2}AB=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{70\sqrt{6}}{9}=\dfrac{70}{3}$m.

故选：B.

7．给出下面四个命题：

①函数$f(x)=2^x-x^2$在(3，5)内存在零点；

②函数$f(x)=\sqrt{x^2+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$（$x\in\mathrm{R}$）的最小值是 2；

③若$a<b<0$，则$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；

④命题的“$\exists x<0,x^2-x-2<0$”否定是“$\forall x\ge 0,x^2-x-2\ge 0$”

其中真命题个数是（　　）

A． 1　　**B．** 2　　**C．** 3　　**D．** 4

【来源】天津市滨海新区2020-2021学年高二下学期期末数学试题

【答案】A

【分析】

对选项进行判断得解

【详解】

①函数$f(x)=2^x-x^2$在(3，5)内存在零点；

$\because f(4)=0$，所以①正确

②函数$f(x)=\sqrt{x^2+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$（$x\in\mathrm{R}$）的最小值是 2；

$\because f(x)=\sqrt{x^2+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}\ge 2$当且仅当$\sqrt{x^2+2}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$时等号成立，此时无解

所以②不正确

③若$a<b<0$，则$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$；

由不等式性质知③不正确

④命题的“$\exists x<0,x^2-x-2<0$”否定是“$\forall x<0,x^2-x-2\ge 0$”故④不正确

故选：A

8．存在$a,b\in\mathbf{R}$，使$x\in[-1,2]$时恒有$(|x+a|-b)(x^2+x-2)\ge 0$，则（　　）

A． $a\le 1$　　**B．** $a\ge 1$　　**C．** $b\le 1$　　**D．** $b\ge 1$

【来源】浙江省绍兴市2020-2021学年高二下学期期末数学试题

【答案】D

【分析】
由题意令 $f(x)=x^2+x-2$，则 $x\in[-1,1]$ 上 $|x+a|\le b$ 恒成立，$x\in(1,2]$ 上 $|x+a|\ge b$ 恒成立，讨论 $a>0$ 、$a=0$ 、$a<0$，上述两区间内的绝对值不等式是否同时成立，即可求参数的范围.
【详解】
令 $f(x)=x^2+x-2$，
∴在 $x\in[-1,1]$ 上恒有 $f(x)\le 0$，在 $x\in(1,2]$ 上恒有 $f(x)>0$，
∴ $x\in[-1,1]$ 上 $|x+a|\le b$ 恒成立，$x\in(1,2]$ 上 $|x+a|\ge b$ 恒成立，
∴令 $h(x)=|x+a|$，即 $x\in[-1,1]$ 时，$b\ge h(x)_{\max}$；$x\in(1,2]$ 上 $b\le h(x)_{\min}$；
∴当 $a>0$ 时，$x\in[-1,1]$ 上 $b\ge 1+a$，$x\in(1,2]$ 上 $b\le 1+a$，此时 $b=1+a>1$；
当 $a=0$ 时，$x\in[-1,1]$ 上 $b\ge 1$，$x\in(1,2]$ 上 $b\le 1$，此时 $b=1$；
当 $a<0$ 时，$x\in[-1,1]$ 上 $b\ge|-1+a|$，
在 $x\in(1,2]$ 上，有：
① $a\in[-1,0)$ 时，$h(x)_{\min}>|1+a|, b\le|1+a|<|-1+a|$；
② $a\in(-2,-1)$ 时，$h(x)_{\min}=0, b\le 0<|-1+a|$，
当 $a\le -2, h(x)_{min}=|2+a|, b\le|2+a|<|-1+a|$.
此时，b 不能在 $[-1,1]$ 和 $[1,2]$ 上同时成立.
综上，有 $b\ge 1, a\ge 0$.
故选：D
【点睛】
关键点点睛：由题意易得 $x\in[-1,1]$ 上 $|x+a|\le b$ 恒成立，$x\in(1,2]$ 上 $|x+a|\ge b$ 恒成立，令 $h(x)=|x+a|$，讨论参数 a，并确认在 $[-1,1]$ 和 $[1,2]$ 上绝对值不等式是否可以同时成立，求参数范围.

二、多选题

9．已知函数 $f(x)=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$，$g(x)=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$，则（　　）

A．函数 $f(x)$ 为偶函数

B．函数 $g(x)$ 为奇函数

C．函数 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值之和为 0

D．设 $F(x)=f(x)+g(x)$，则 $F(2a)+F(-1-a)<0$ 的解集为 $(1,+\infty)$

【来源】试卷 18（第 1 章－6.3 对数函数）-2021-2022 学年高一数学易错题、精典题滚动训练（苏教版 2019 必修第一册）
【答案】BCD
【分析】
根据题意，利用奇偶性，单调性，依次分析选项是否正确，即可得到答案
【详解】
对于 A：$f(x)=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$，定义域为 R，$f(-x)=\dfrac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}}=-\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$，
则 $f(x)$ 为奇函数，故 A 错误；
对于 B：$g(x)=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$，定义域为 R，
$g(-x)=\lg\left(\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)\right)=-\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-g(x)$，
则 $g(x)$ 为奇函数，故 B 正确；
对于 C：$F(x)=f(x)+g(x)$，$f(x)$，$g(x)$ 都为奇函数，
则 $F(x)=f(x)+g(x)$ 为奇函数，
$F(x)=f(x)+g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值互为相反数，
必有 $F(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值之和为 0，故 C 正确；

对于 D：$f\left(x\right)=\dfrac{1-2^{x}}{1+2^{x}}=-\left(\dfrac{2^{x}+1-2}{2^{x}+1}\right)=\dfrac{2}{2^{x}+1}-1$，则$f\left(x\right)$在$R$上为减函数，

$g\left(x\right)=\lg\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)=\lg\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+1}+x}$，则$g\left(x\right)$在$R$上为减函数，

则$F\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$在$R$上为减函数，

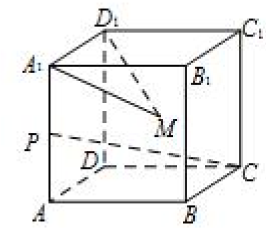
若$F\left(2a\right)+F\left(-1-a\right)<0$即$F\left(2a\right)<F\left(1+a\right)$，

则必有$2a>1+a$，解得$a>1$，

即$F\left(2a\right)+F\left(-1-a\right)<0$的解集为$(1,+\infty)$，故 D 正确；

故选：BCD

10. 已知正方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$的棱长为4，点P是AA_1 的中点，点M是侧面AA_1B_1B 内的动点，且满足$D_1M\perp CP$，下列选项正确的是（　　）



A．动点M轨迹的长度是$2\sqrt{5}$

B．三角形A_1D_1M在正方体内运动形成几何体的体积是$\dfrac{32}{3}$

C．直线D_1M与BC所成的角为α，则$\tan\alpha$的最小值是$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

D．存在某个位置M，使得直线BD_1与平面A_1D_1M所成的角为$\dfrac{\pi}{4}$

【来源】浙江省丽水市 2020-2021 学年高一下学期期末数学试题

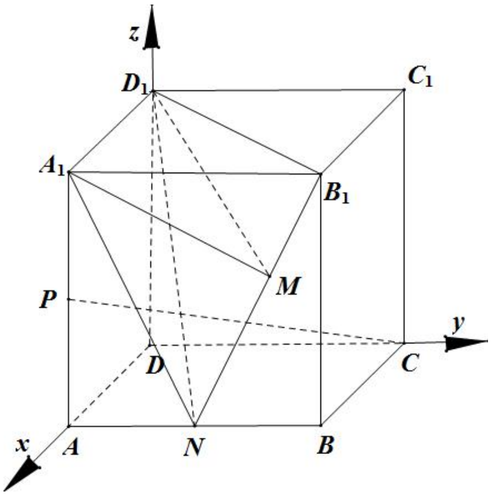
【答案】ABC

【分析】

建立坐标系，由$D_1M\perp CP$可得出动点动点M轨迹为线段B_1N，然后结合勾股定理，异面直线所成角，线面角，体积公式等逐一判断即可

【详解】

以D为原点，DA为x轴，DC为y轴，DD_1为z轴，建立空间直角坐标系，



则$M\left(4,y,z\right),D_1\left(0,0,4\right),P\left(4,0,2\right),C\left(0,4,0\right),A_1\left(4,0,4\right),B\left(4,4,0\right)$，

$\overrightarrow{D_1M}=\left(4,y,z-4\right),\overrightarrow{CP}=\left(4,-4,2\right)$，

$\because D_1M\perp CP$，

$\therefore\overrightarrow{D_1M}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，即$2y-z=4$，

取AB得中点N，则动点M轨迹为线段B_1N，

对于 A：动点M轨迹为线段B_1N，且$B_1N=\sqrt{BN_2+BB_1{}^2}=2\sqrt{5}$，故 A 正确；

对于 B：三角形 A_1D_1M 在正方体内运动形成几何体为三棱锥 $D_1-A_1NB_1$，

且 $V_{D_1-A_1NB_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1NB_1}\times A_1D_1=\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{2}(2+4)\times4-\frac{1}{2}\times2\times4\right]\times4=\frac{32}{3}$，故 B 正确；

对于 C：$\because BC//A_1D_1$，

$\therefore$ 直线 D_1M 与 BC 所成的角为 $\alpha=\angle A_1D_1M$，

又 $A_1M_{\min}=\frac{4\times4}{2\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$，则 $\tan\alpha$ 的最小值是 $\frac{A_1M_{\min}}{A_1D_1}=\frac{\frac{8\sqrt{5}}{5}}{4}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故 C 正确；

对于 D：易知 M 与 B_1 重合时，直线 BD_1 与平面 A_1D_1M 所成的角最大，

且为 $\angle BD_1B_1$，$\because \tan\angle BD_1B_1=\frac{BB_1}{B_1D_1}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1=\tan\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \angle BD_1B_1<\frac{\pi}{4}$，

所以不存在某个位置 M，使得直线 BD_1 与平面 A_1D_1M 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，

故 D 错误；

故选：ABC

11．已知双曲线 $E:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的动直线 l 与 E 相交于 A，B 两点，则（　　）

A．曲线 E 与椭圆 $x^2+\frac{y^2}{6}=1$ 有公共焦点

B．曲线 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，渐近线方程为 $x\pm2y=0$．

C．$|AB|$ 的最小值为 1

D．满足 $|AB|=4$ 的直线 l 有且仅有 4 条

【来源】广东省广州市广大附、广外、广铁三校 2020-2021 学年高二下学期期末联考数学试题

【答案】BC

【分析】

求出双曲线和椭圆的焦点即可判断 A；求出双曲线的离心率和渐近线可判断 B；分别求 A，B 两点位于双曲线的异支和同支时，弦长 $|AB|$ 的最小值可判断 C；根据 $|AB|$ 的最小值可知直线 l 有多少条，可判断 D，进而可得正确选项.

【详解】

对于 A：由 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 知双曲线的焦点在 x 轴上，由 $x^2+\frac{y^2}{6}=1$ 知椭圆的焦点在 y 轴上，所以焦点不相同，故选项 A 不正确；

对于 B：由双曲线 $E:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 可得 $a^2=4$，$b^2=1$，所以 $c^2=a^2+b^2=4+1=5$，

所以双曲线的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，渐进线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{2}x$，即 $x\pm2y=0$，

故选项 B 正确；

对于 C：当 A，B 两点位于双曲线的异支时，直线 AB 的斜率为 0 时 $|AB|$ 最小，此时 A，B 两点分别为双曲线的左右顶点，此时 $|AB|=2a=4$，

当 A，B 两点位于双曲线的同支时，直线 AB 的斜率不存在时 $|AB|$ 最小，直线 AB 的方程为 $x=\sqrt{5}$ 代入 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 可得 $y=\pm\frac{1}{2}$，所以 $|AB|=2\times\frac{1}{2}=1$，所以 $|AB|$ 的最小值为 1，故选项 C 正确；

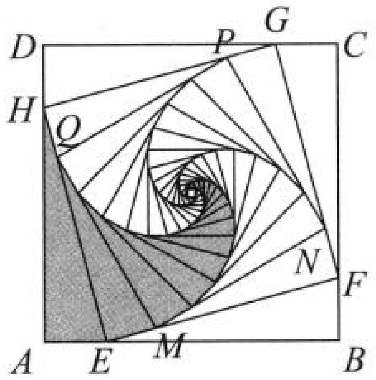
对于 D：由选项 C 知，当 A，B 两点位于双曲线的异支时，$|AB|_{\min}=4$，此时只有一条，

当 A，B 两点位于双曲线的同支时，$|AB|_{\min}=1$，根据对称性可知，此时存在两条直线使得 $|AB|=4$，所以满足 $|AB|=4$ 的直线 l 有且仅有 3 条.故选项 D 不正确；

故选：BC.

12．数学中有各式各样富含诗意的曲线，螺旋线就是其中比较特别的一类.螺旋线这个名词来源于希腊文，它的原意是“旋卷”或“缠卷”.小明对螺旋线有着浓厚的兴趣，连接嵌套的各个正方形的顶点就得到了近似于螺旋线的美丽

图案，其具体作法是：在边长为1的正方形$ABCD$中，作它的内接正方形$EFGH$，且使得$\angle BEF=15^\circ$；再作正方形$EFGH$的内接正方形$MNPQ$，且使得$\angle FMN=15^\circ$；类似地，依次进行下去，就形成了阴影部分的图案，如图所示.设第n个正方形的边长为a_n(其中第1个正方形$ABCD$的边长为$a_1=AB$，第2个正方形$EFGH$的边长为$a_2=EF$，…)，第n个直角三角形(阴影部分)的面积为S_n(其中第1个直角三角形AEH的面积为S_1，第2个直角三角形EQM的面积为S_2，…)，则（　　）



A．数列$\{a_n\}$是公比为$\frac{2}{3}$的等比数列　　　　**B．$S_1=\frac{1}{12}$**

C．数列$\{S_n\}$是公比为$\frac{4}{9}$的等比数列　　　　**D．数列$\{S_n\}$的前n项和$T_n<\frac{1}{4}$**

【来源】河北省2021届高三鸿浩超级联考数学试题

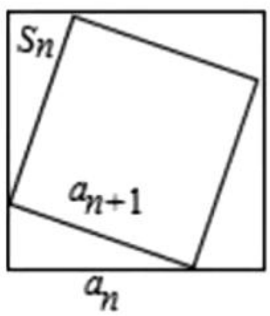
【答案】BD

【分析】

先得到$a_n=\frac{\sqrt{6}}{2}a_{n+1}$，即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{6}}{3}$可判断A，再求出$S_n=\frac{1}{8}\times(\frac{2}{3})^n$，可判断B与C，最后求出$T_n=\frac{1}{4}\left[1-(\frac{2}{3})^2\right]$，可判断D.

【详解】

如图：



由图知$a_n=a_{n+1}(\sin15^\circ+\cos15^\circ)=a_{n+1}\times\sqrt{2}\sin(15^\circ+45^\circ)=\frac{\sqrt{6}}{2}a_{n+1}$，

对于A：$a_n=\frac{\sqrt{6}}{2}a_{n+1},\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，数列$\{a_n\}$是公比为$\frac{\sqrt{6}}{3}$的等比数列，故A不正确；

对于BC：因为$a_n=1\times(\frac{\sqrt{6}}{3})^{n-1}=(\frac{\sqrt{6}}{3})^{n-1}$，所以$S_n=\frac{a_n^2-a_{n+1}^2}{4}=\frac{1}{4}\left[(\frac{2}{3})^{n-1}-(\frac{2}{3})^n\right]=\frac{1}{8}\times(\frac{2}{3})^n$，

所以数列$\{S_n\}$是首项为$\frac{1}{12}$，公比为$\frac{2}{3}$的等比数列，故B正确，C不正确；

对于D：因为$T_n=\dfrac{\frac{1}{12}\left[1-(\frac{2}{3})^n\right]}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}\left[1-(\frac{2}{3})^2\right]<\frac{1}{4}$，故D正确，

故选：BD.

【点睛】

关键点睛：本题考查数列的归纳推理，关键在于根据几何图形的性质得出数列的递推关系式.

三、填空题

13．如图所示的后母戊鼎是一件非常有名的青铜重器，是商王武丁之子祭祀母亲戊所铸，现藏于国家博物馆．鼎身与四足为整体铸造，鼎耳则是在鼎身铸成之后再浇铸而成，鼎身大致为长方体形状的容器，长为110cm，宽为79cm，壁厚6cm．若一堆祭祀物品在该容器内燃烧后形成的灰平铺且铺满容器底部，灰的高度为0.5cm，则灰的体积为________cm^3．

【来源】安徽省 2020-2021 学年高一下学期期中数学试题

【答案】3283

【分析】

由已知求出灰体的长度与宽度，由长方体体积公式求解．

【详解】

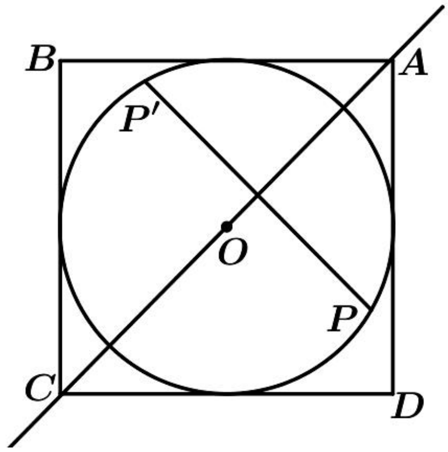
解：由题意，容器内灰体的长度为$110-12=98$，

灰体的宽度为$79-12=67$，

又高度为 0.5，$\therefore$灰的体积为$98\times 67\times 0.5=3283cm^2$．

故答案为：3283．

14．如图所示，半径为 1 的圆O内接于正方形$ABCD$，点P是圆O上的一个动点，点P'与P关于直线AC成轴对称，若$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OP'}$，则$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$的取值范围是______．



【来源】上海交通大学附属中学 2020-2021 学年高一下学期期末数学试题

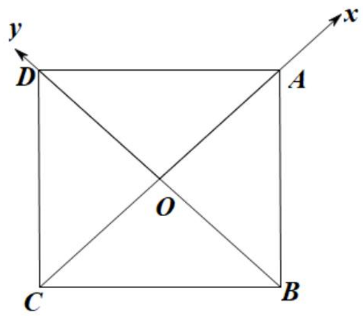
【答案】$\left[\sqrt{2},\sqrt{6}\right]$

【分析】

根据题意，建立适当的平面直角坐标系，转化为坐标运算即可求解.

【详解】

如图所示，建立平面直角坐标系，



故$O\left(0,0\right)$，$A\left(\sqrt{2},0\right)$，设$P\left(x_0,y_0\right)$，$Q\left(x,y\right)$，则$P'\left(x_0,-y_0\right)$，

因 $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OP'}$，所以 $\begin{cases}x-\sqrt{2}=x_0\\y=-y_0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=x_0+\sqrt{2}\\y=-y_0\end{cases}$，

因此 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}=\sqrt{2+4y_0^2}$，

又因点 P 是圆 O 上的一个动点，所以 $x_0^2+y_0^2=1$，因此 $0\le y_0^2\le 1$，

故 $\sqrt{2}\le\sqrt{2+4y_0^2}\le\sqrt{6}$，因此 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ 的取值范围为 $\left[\sqrt{2},\sqrt{6}\right]$.

故答案为：$\left[\sqrt{2},\sqrt{6}\right]$.

15．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-2ax-a+2,x\ge 0\\\ln\left(-x\right),x<0\end{cases}$ 和 $g\left(x\right)=x^2+1-2a$，有下列四个结论：

①当 $a=1$ 时，若函数 $y=f\left(x\right)-m$ 有 3 个零点，则 $0<m\le 1$；

②当 $1<a\le 2$ 时，函数 $y=f\left(g\left(x\right)\right)$ 有 6 个零点；

③当 $a=\frac{1}{2}$ 时，函数 $y=g\left(f\left(x\right)\right)$ 的所有零点之和为 -1；

④当 $a=1$ 时，函数 $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ 有 3 个零点；

其中正确结论的序号为________.

【来源】浙江省宁波市九校 2020-2021 学年高二下学期期末联考数学试题

【答案】①②③

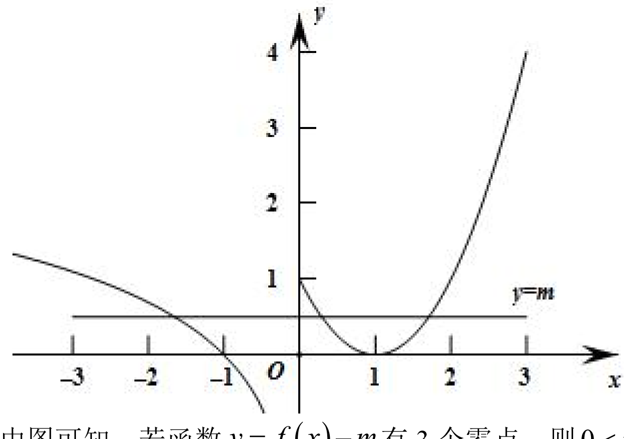
【分析】

对于①：作出直线 $y=m$ 与函数 $f\left(x\right)$ 的大致图象，根据题意即可判定；对于②：令 $g\left(x\right)=t$，作出函数 $y=f\left(t\right)$，$t=g\left(x\right)$ 的大致图象，先判定 $y=f\left(t\right)$ 的零点 t 的值或范围，再对 t 的每一个值判定 $t=g\left(x\right)$ 的根的个数，综合即得函数 $y=f\left(g\left(x\right)\right)$ 的零点个数；对于③：令 $u=f\left(x\right)$，则 $y=g\left(u\right)$，作出函数 $u=f\left(x\right)$，$y=g\left(u\right)$ 的大致图象，判定函数 $y=g\left(u\right)$ 的零点 u 的值，进而求得 $u=f\left(x\right)$ 的根，即得函数 $y=g\left(f\left(x\right)\right)$ 的所有零点之和；对于④：令 $v=f\left(x\right)$，则 $y=f\left(v\right)$，作出函数 $y=f\left(v\right)$，$v=f\left(x\right)$ 的大致图象，由图得到函数 $y=f\left(v\right)$ 的各个零点，然后分别求得 $v=f\left(x\right)$ 的根的个数，即得函数 $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ 的零点个数.

【详解】

解：对于①：当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-2x+1=(x-1)^2,x\ge 0\\\ln\left(-x\right),x<0\end{cases}$，

作出直线 $y=m$ 与函数 $f\left(x\right)$ 的大致图象，如下：



由图可知，若函数 $y=f\left(x\right)-m$ 有 3 个零点，则 $0<m\le 1$，故①正确；

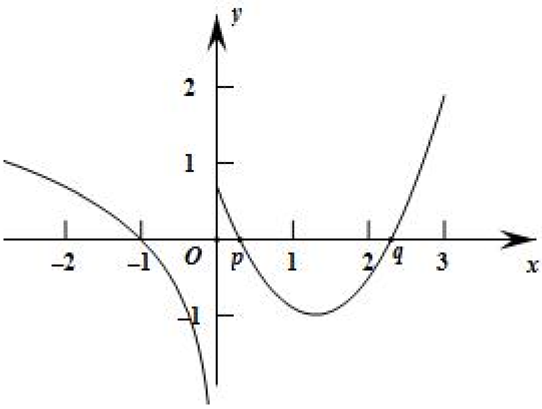
对于②：当 $x\ge 0$ 时，$f\left(x\right)=x^2-2ax-a+2$，

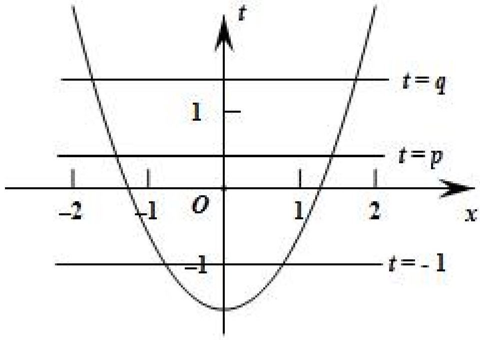
其对应的方程的根判别式为 $\Delta=(-2a)^2-4\left(-a+2\right)=(2a+1)^2-9$，

当 $1<a\le 2$ 时，$\Delta>0$，

令 $g\left(x\right)=t$，作出函数 $y=f\left(t\right)$，$t=g\left(x\right)$ 的大致图象，

分别如下：





由图可知，函数$y=f(t)$有 3 个零点，即$t_1=-1$，$t_2=p$，$t_3=q$，且$0<p<1$，$q>1$，

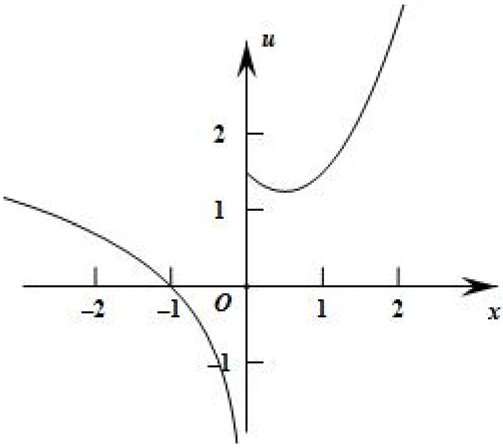
又$g(0)=1-2a<-1$，且函数$t=g(x)$的图象与直线$t=-1$，$t=p$，$t=q$共 6 个交点，

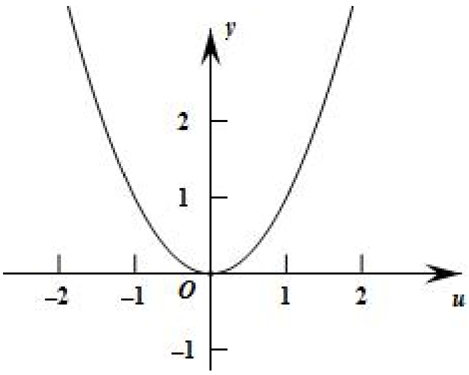
所以函数$y=f(g(x))$有 6 个零点，故②正确；

对于③：当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=\begin{cases}x^2-x+\frac{3}{2}, x\geq 0\\ \ln(-x), x<0\end{cases}$，

令$u=f(x)$，则$y=g(u)$，作出函数$u=f(x)$，$y=g(u)$的大致图象，

分别如下：





由图可知，函数$y=g(u)$只有 1 个零点，即$u=0$，

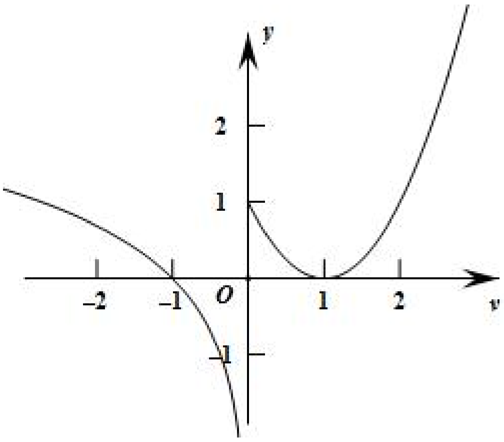
函数$u=f(x)$的图象与直线$u=0$只有 1 个交点，为$(-1,0)$，

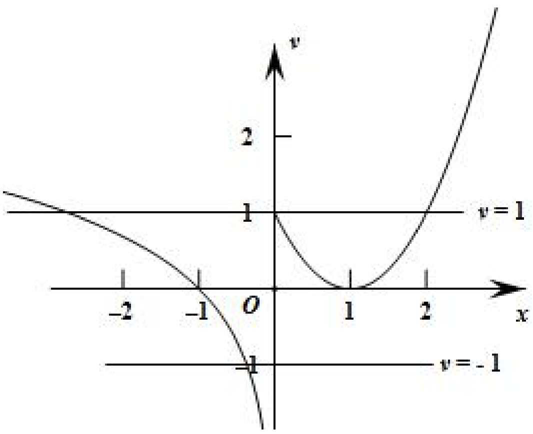
所以函数$y=g(f(x))$所有零点之和为-1，故③正确；

对于④：当$a=1$时，$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1=(x-1)^2, x\geq 0\\ \ln(-x), x<0\end{cases}$，

令$v=f(x)$，则$y=f(v)$，

作出函数$y=f(v)$，$v=f(x)$的大致图象，分别如下：

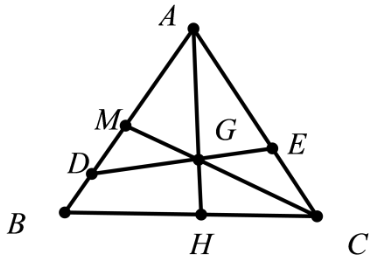




由图可知，函数 $y=f\left(v\right)$ 有 2 个零点，即 $v_1=-1$，$v_2=1$，
函数 $v=f\left(x\right)$ 的图象与直线 $v=-1$，$v=1$ 共有 4 个交点，
所以 $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ 有四个零点，故④不正确．
故答案为：①②③．
【点睛】
本题考查函数的零点问题，涉及分段函数，复合函数，解题中注意复合函数的拆解与数形结合思想的应用．

16．在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=6$，G 为其重心，直线 DE 经过点 G，且与射线 AB、AC 分别交于 D、E 两点，记 $\triangle ADG$ 和 $\triangle CEG$ 的面积分别为 S_1,S_2，则当 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 取得最小值时，$\overline{AD}\cdot\overline{AE}$ 的值为______．

【来源】【新东方】高中数学 20210527-031【2021】【高一下】
【答案】$\sqrt{3}+1$
【分析】
设 $\vec{AB}=\lambda\vec{AD}$，$\vec{AC}=\mu\vec{AE}$，根据重心位置及共线定理求得 $\lambda+\mu=3$，根据面积公式分别表示出 S_1,S_2 分别与 $S_{\triangle ABH}$，$S_{\triangle ACM}$ 的关系，代入求得 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 取最小值时的参数 λ,μ 的值，根据 $\vec{AD}\cdot\vec{AE}$ 与 $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ 间的关系求得结果.
【详解】
设 $\vec{AB}=\lambda\vec{AD}$，$\vec{AC}=\mu\vec{AE}$，$(\lambda,\mu>0)$，且 G 为三角形 ABC 的重心，延长 AG 交 BC 于 H，延长 CG 交 AB 于 M，
则 $S_{\triangle ACM}=S_{\triangle ABH}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，



则 $\vec{AG}=\dfrac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{AC})=\dfrac{1}{3}\lambda\vec{AD}+\dfrac{1}{3}\mu\vec{AE}$，又 D，G，E 三点共线，
则 $\dfrac{1}{3}\lambda+\dfrac{1}{3}\mu=1$，即 $\lambda+\mu=3$，
$S_{\triangle ADG}=\dfrac{1}{2}AD\cdot AG\cdot\sin\angle DAG=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{AB}{\lambda}\cdot\dfrac{2AH}{3}\cdot\sin\angle DAG=\dfrac{2}{3\lambda}S_{\triangle ABH}$，
同理得 $S_{\triangle CEG}=\dfrac{2(\mu-1)}{3\mu}S_{\triangle ACM}$，
则 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{2}{3\lambda}}{\frac{2(\mu-1)}{3\mu}}=\dfrac{\mu}{\lambda(\mu-1)}$，又 $\lambda=3-\mu$，

则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\mu}{(3-\mu)(\mu-1)}=\frac{\mu}{-\mu^2+4\mu-3}=\frac{1}{-\mu-\frac{3}{\mu}+4}\geq\frac{1}{4-2\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

当且仅当 $\mu=\frac{3}{\mu}$ 即 $\mu=\sqrt{3}$ 时，等号成立，此时 $\lambda=3-\mu=3-\sqrt{3}$，

$\vec{AD}\cdot\vec{AE}=\frac{\vec{AB}}{\lambda}\cdot\frac{\vec{AC}}{\mu}=\frac{6}{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}=\sqrt{3}+1$

故答案为：$\sqrt{3}+1$

【点睛】

方法点睛：利用共线定理求得两个参数 λ,μ 的关系，根据比例关系表示出 S_1,S_2，进而求得取何条件时 $\frac{S_1}{S_2}$ 取最小值，此时求得 λ,μ，根据面积公式结合向量间的关系求得结果.

四、解答题

17．已知等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，与数列 $\{a_n\}$ 满足 $b_n=3^{a_n}\left(n\in N^*\right)$.

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

（2）若 $b_5=3$，且数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和 $S_3=21$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（3）在（2）的条件下，求 $T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

【来源】江西省九江市都昌县第二中学 2020-2021 学年高二上学期第一次月考数学试题

【答案】（1）证明见解析；（2）$a_n=11-2n$；（3）$T_n=\begin{cases}-n^2+10n & (n\le 5)\\ n^2-10n+50 & (n\ge 6)\end{cases}$.

【分析】

（1）运用等比数列的定义和等差数列的定义,即可得证;

（2）由等比数列的通项公式和等差数列的通项公式和求和公式,解方程可得首项和公差,进而得到所求通项公式;

（3）求得 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,对 n 的范围讨论,化简即可得到所求和.

【详解】

（1）证明：设 $\{b_n\}$ 的公比为 q, $\because b_n=3^{a_n}\quad\left(n\in N^*\right)$

$\therefore a_n=\log_3 b_n\left(n\in N^*\right)$

$\therefore a_{n+1}-a_n=\log_3 b_{n+1}-\log_3 b_n=\log_3\frac{b_{n+1}}{b_n}=\log_3 q$（与 n 无关的常数）

∴数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 $\log_3 q$.

（2）解：$\because b_5=3^{a_5}=3, S_3=21, \therefore a_1+4d=1, 3a_1+3d=21$

$\therefore a_1=9, d=-2$

$\therefore a_n=9-2(n-1)=11-2n$

（3）解：由 $a_n=11-2n\geq 0$，得 $n\leq 5; a_n=11-2n\leq 0$ 得 $n\geq 6$

$\therefore\{a_n\}$ 的前 5 项是正数，从第六项开始是负数.

①当 $n\leq 5$ 时，$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

$=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{(9+11-2n)n}{2}=-n^2+10n$.

②当 $n\ge 6$ 时，$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

$=a_1+a_2+\ldots+a_5-\left(a_6+a_7+\ldots+a_n\right)$

$=2\left(a_1+a_2+\ldots+a_5\right)-\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)$

$=2\times\frac{(9+1)\times 5}{2}-\left(-n^2+10n\right)$

$=n^2-10n+50$

综上所述：$T_n=\begin{cases}-n^2+10n & (n\le 5)\\ n^2-10n+50 & (n\ge 6)\end{cases}$.

18．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对边分别为 a，b，c，且向量 $\vec{m}=(\sin A,\sin B)$，$\vec{n}=(\cos B,\cos A)$，满足 $\vec{m}\cdot\vec{n}=\sin 2C$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若 $\sin A$ ，$\sin C$ ，$\sin B$ 成等差数列，且 $\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=18$ ，求 c 边的长.

【来源】四川省乐山市十校 2020-2021 学年高一下学期期中数学试题

【答案】（1）$\frac{\pi}{3}$；（2）6.

【分析】

（1）首先利用向量数量积的坐标表示，并结合三角恒等变换，化简求得 $\cos C=\frac{1}{2}$，即可求得角 C 的大小；

（2）首先由正弦定理边角互化，得 $2c=a+b$ ，再结合数量积公式得 $ab=36$ ，最后根据余弦定理求 c 边长.

【详解】

解：（1）$\vec{m}\cdot\vec{n}=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin\left(A+B\right)$

对于 $\triangle ABC$ ，$A+B=\pi-C$ ，$0<C<\pi$，

$\therefore\sin\left(A+B\right)=\sin C$

$\therefore\vec{m}\cdot\vec{n}=\sin C$

又 $\vec{m}\cdot\vec{n}=\sin 2C$，

$\therefore\sin 2C=2\sin C\cos C=\sin C$ ，即 $\cos C=\frac{1}{2}$，又 $C\in\left(0,\pi\right)$

$\therefore C=\frac{\pi}{3}$；

（2）由 $\sin A$ ，$\sin C$ ，$\sin B$ 成等差数列，得 $2\sin C=\sin A+\sin B$

由正弦定理得 $2c=a+b$，

$\because\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=18$，

$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=18$，

得 $ab\cos C=18$，即 $ab=36$，

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=\left(a+b\right)^2-3ab$ ，

$\therefore c^2=4c^2-3\times36$，即 $c^2=36$，

$\therefore c=6$.

19．一疫苗生产单位通过验血方法检验某种疫苗产生抗体情况，需要检验血液是否有抗体现有 $n\left(n\in N^*\right)$ 份血液样本每份样本取到的可能性均等有以下两种检验方式：(1)逐份检验，则需要检验 *n* 次；(2)混合检验将其中 k（$k\in N^*$ 且 $k\geq2$）份血液样本分别取样混合在一起检验若检验结果无抗体，则这 *k* 份的血液全无抗体，因而这 *k* 份血液样本只需检验一次就够了，若检验结果有抗体，为了明确这 *k* 份血液究竟哪几份有抗体就要对这 *k* 份再逐份检验，此时这 *k* 份血液的检验总次数为 *k*+1 次假设在接受检验的血液样本中，每份样本的检验结果有无抗体都是相互独立的，且每份样本有抗体的概率均为 $p\left(0<p<1\right)$.

（1）假设有 5 份血液样本，其中只有 2 份血液样本有抗体，若采用逐份检验方式，求恰好经过 3 次检验就能把有抗体的血液样本全部检验出来的概率；

（2）现取其中 k（$k\in N^*$ 且 $k\geq2$）份血液样本，记采用逐份检验方式，样本需要检验的总次数为 ξ_1，采用混合检验方式样本需要检验的总次数为 ξ_2．若 $E\left(\xi_1\right)=E\left(\xi_2\right)$，求 p 关于 *k* 的函数关系式 $p=f\left(k\right)$，并证明 $p<1-e^{-\frac{1}{e}}$.

【来源】山东省潍坊市 2020-2021 学年高二下学期期末数学试题

【答案】（1）$\frac{3}{10}$；（2）$p=f\left(k\right)=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}\left(k\in N^*,k\geq2\right)$；证明见解析.

【分析】

（1）设恰好经过 3 次检验就能把阳性样本全部检验出来为事件 A，由古典概型概率计算公式可得答案；

（2）由题得 $E\left(\xi_2\right)=k+1-k\left(1-p\right)^k$ ，$E\left(\xi_1\right)=k$ ，进而根据 $E\left(\xi_1\right)=E\left(\xi_2\right)$ 化简整理得 $p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$，再令 $t=\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$（$k\geq2$ 且 $k\in\mathbf{N}^*$）得 $\ln t=\frac{1}{k}\ln\frac{1}{k}=-\frac{\ln k}{k}$，再令 $g\left(x\right)=-\frac{\ln x}{x}\left(x\geq2\right)$，利用导数研究最值得 $\frac{-\ln k}{k}>-\frac{1}{e}$，进而得 $e^{\frac{1}{k}\ln\frac{1}{k}}>e^{-\frac{1}{e}}$，即 $\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}>e^{-\frac{1}{e}}$，进而证明 $p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}<1-e^{-\frac{1}{e}}$.

【详解】

解：（1）设恰好经过 3 次检验能把有抗体血液样本全部检验出来为事件 A，

所以$P\left(A\right)=\frac{C_2^1C_2^1A_3^3+A_3^3A_2^2}{A_5^5}=\frac{3}{10}$，

所以恰好经过3次检验就能把有抗体的血液样本全部检验出来的概率为$\frac{3}{10}$.

（2）由已知得$E\left(\xi_1\right)=k$，

ξ_2的所有可能取值为1，$k+1$.

所以$P\left(\xi_2=1\right)=\left(1-p\right)^k$，$P\left(\xi_2=k+1\right)=1-\left(1-p\right)^k$，

所以$E\left(\xi_2\right)=\left(1-p\right)^k+\left(k+1\right)\left[1-\left(1-p\right)^k\right]=k+1-k\left(1-p\right)^k$，

若$E\left(\xi_1\right)=E\left(\xi_2\right)$，则$k=k+1-k\left(1-p\right)^k$，

所以$k\left(1-p\right)^k=1$，$\left(1-p\right)^k=\frac{1}{k}$，

所以$1-p=\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$，即$p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$，

所以p关于k的函数关系式为$p=f\left(k\right)=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$（$k\geq 2$且$k\in\mathbf{N}^*$）

证明：令$t=\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$（$k\geq 2$且$k\in\mathbf{N}^*$）

所以$\ln t=\frac{1}{k}\ln\frac{1}{k}=-\frac{\ln k}{k}$，

令$g\left(x\right)=-\frac{\ln x}{x}\left(x\geq 2\right)$，

$g'\left(x\right)=\frac{\ln x-1}{x}$，

所以$g'\left(x\right)=0$得$x=e$，

所以$x\in\left(2,e\right)$，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$单调递减，

$x\in\left(e,+\infty\right)$，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$单调递增

所以$g\left(x\right)_{\min}=g\left(e\right)=-\frac{1}{e}$，所以$\frac{-\ln x}{x}\geq -\frac{1}{e}$，

因为$k\geq 2$且$k\in N^*$，

所以$\frac{-\ln k}{k}>-\frac{1}{e}$，即$\frac{1}{k}\ln\frac{1}{k}>-\frac{1}{e}$，

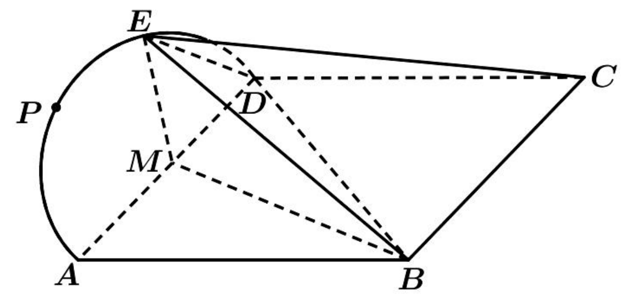
所以$e^{\frac{1}{k}\ln\frac{1}{k}}>e^{-\frac{1}{e}}$，即$\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}>e^{-\frac{1}{e}}$，

所以$p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}<1-e^{-\frac{1}{e}}$.

【点睛】

本题考查古典概型求概率，随机变量概率分布列，数学期望，利用导数研究函数的性质等，考查运算求解能力，逻辑推理能力，是难题.本题第二问题解题的关键在于根据题意求得$E\left(\xi_2\right)=k+1-k\left(1-p\right)^k$，进而结合$E\left(\xi_1\right)=E\left(\xi_2\right)$得$p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$，再通过换元法结合导数研究函数不等式.

20．如图，E是以菱形$ABCD$的边AD为直径的半圆弧上一点，$\angle BAD=60^\circ$，$AB=BE=2DE=2$，且M为AD的中点.



（1）求证：平面 $BEM\perp$ 平面 DEM；

（2）设 P 为 $\overset{\frown}{AE}$ 上任意一点，求二面角 $B-PD-C$ 的余弦值取值范围.

【来源】江苏省南京市金陵中学、南通市海安中学、南京市外国语学校等三校2021届高三下学期高考考前模拟联考数学试题

【答案】（1）证明见解析；（2）$\left[\frac{3}{5},1\right]$.

【分析】

（1）要证平面 $BEM\perp$ 平面 DEM，只要证平面 BEM 内的一条直线垂直于平面 DEM 即可，根据题意可得 $BM\perp AD$ 且 $BM\perp EM$，所以 $BM\perp$ 平面 DEM，即可得证；

（2）取半圆弧中点 F，连接 MF，由（1）知 $BM\perp$ 平面 DEM，根据条件可得 $MF\perp$ 平面 $ABCD$，如图以 M 为坐标原点，建立空间直角坐标系，求出各面的法向量，利用向量求角公式，即可得解.

【详解】

（1）∵四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=60^\circ$，∴ $\triangle ABD$ 为等边△

又∵ M 为 AD 的中点，∴ $BM\perp AD$

∵ $DM=EM=1$，$BM=\sqrt{3}$，$BE=2$，∴ $BM^2+EM^2=4=BE^2$

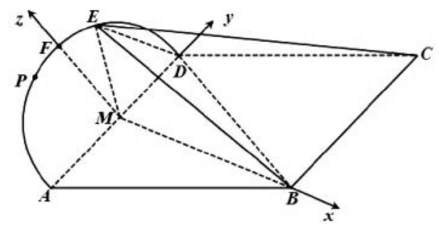
∴ $BM\perp EM$，又∵ $AD\cap EM=M$，∴ $BM\perp$ 平面 DEM

∵ $BM\subset$ 平面 BEM，∴平面 $BEM\perp$ 平面 DEM

（2）取半圆弧中点 F，连接 MF，由（1）知 $BM\perp$ 平面 DEM，

又∵ $BM\subset$ 平面 $ABCD$，∴平面 $ABCD\perp$ 平面 DEM

∵ $MF\perp AD$，∴ $MF\perp$ 平面 $ABCD$，如图以 M 为坐标原点，建立空间直角坐标系



设 $P(0,\cos\theta,\sin\theta)$，$60^\circ\le\theta\le180^\circ$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$D(0,1,0)$，$C(\sqrt{3},2,0)$，

$\overline{BD}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overline{PD}=(0,1-\cos\theta,-\sin\theta)$，$\overline{DC}=(\sqrt{3},1,0)$

设平面 BPD 和平面 PDC 的一个法向量分别为 $\overline{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overline{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$$\therefore\begin{cases}\overline{n_1}\cdot\overline{BD}=0\\ \overline{n_1}\cdot\overline{PD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+y_1=0\\ (1-\cos\theta)y_1-\sin\theta z_1=0\end{cases}\Rightarrow\overline{n_1}=\left(\sin\theta,\sqrt{3}\sin\theta,\sqrt{3}(1-\cos\theta)\right)$$

$$\begin{cases}\overline{n_2}\cdot\overline{PD}=0\\ \overline{n_2}\cdot\overline{DC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1-\cos\theta)y_2-\sin\theta z_2=0\\ \sqrt{3}x_2+y_2=0\end{cases}\Rightarrow\overline{n_2}=\left(-\sin\theta,\sqrt{3}\sin\theta,\sqrt{3}(1-\cos\theta)\right)$$

设二面角 $B-PD-C$ 的平面角为 α，$\vec{n_1}$，$\vec{n_2}$ 所成角为 φ

$$\therefore\cos\alpha=|\cos\varphi|=\left|\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}\right|=\left|\frac{2\sin^2\theta+3(1-\cos\theta)^2}{4\sin^2\theta+3(1-\cos\theta)^2}\right|=\left|\frac{2(1-\cos^2\theta)+3(1-\cos\theta)^2}{4(1-\cos^2\theta)+3(1-\cos\theta)^2}\right|$$

$$=\left|\frac{2(1+\cos\theta)+3(1-\cos\theta)}{4(1+\cos\theta)+3(1-\cos\theta)}\right|=\left|\frac{5-\cos\theta}{7+\cos\theta}\right|=\left|\frac{12}{7+\cos\theta}-1\right|，\quad -1\le\cos\theta\le\frac{1}{2}$$

$$\therefore\frac{8}{5}\le\frac{12}{7+\cos\theta}\le2，$$

$\therefore \cos\alpha$ 的取值范围为 $\left[\frac{3}{5},1\right]$

【点睛】

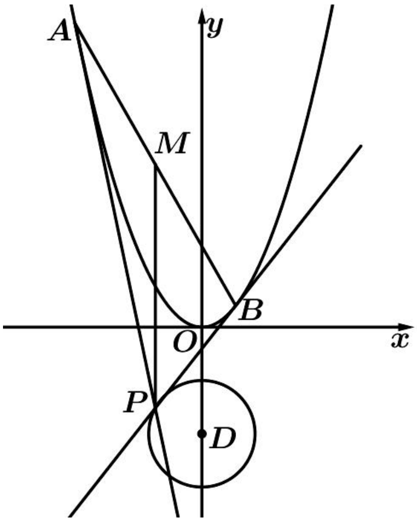
本题考查了面面垂直的证明，考查了向量法求二面角的大小，考查了逻辑推理能力和较高的计算能力，属于较难题.

本题的关键点有：

（1）掌握面面垂直的判定定理，掌握执果索因的逆向思维；

（2）掌握利用空间向量求二面角，计算能力是解决此类问题的核心能力.

21．如图，点 P 在抛物线 $C: y=x^2$ 外，过 P 作抛物线 C 的两切线，设两切点分别为 $A\left(x_1,x_1^2\right)$，$B\left(x_2,x_2^2\right)$，记线段 AB 的中点为 M.



（1）求切线 PA，PB 的方程；

（2）设点 P 为圆 $D: x^2+\left(y+2\right)^2=1$ 上的点，当 $\frac{|AB|}{|PM|}$ 取最大值时，求点 P 的纵坐标.

【来源】浙江省嘉兴市桐乡市高级中学 2020-2021 学年高二下学期第一次月考数学试题

【答案】（1）$PA: y=2x_1x-x_1^2$，$PB: y=2x_2x-x_2^2$；（2）$-\frac{\sqrt{29}+1}{4}$.

【分析】

（1）结合导数的几何意义即可求得；

（2）设 $AB: y=kx+b$，代入抛物线方程运用根与系数的关系得出 $x_1+x_2=k, x_1x_2=-b$，进而可以得到 P 的坐标，代入圆的方程可得 k,b 的关系并求出 b 的范围，求出 $\frac{|AB|}{|PM|}$ 并化简，从函数或不等式的角度求出答案.

【详解】

（1）由题 $y'=2x$，所以切线 $PA: y=2x_1\left(x-x_1\right)+x_1^2=2x_1x-x_1^2$，同理切线 $PB: y=2x_2x-x_2^2$

（2）由（1）联立两切线方程 $\begin{cases} y=2x_1x-x_1^2 \\ y=2x_2x-x_2^2 \end{cases}$，解得：$P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_1x_2\right)$，

设直线 $AB: y=kx+b$，则联立 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=kx+b \end{cases}$，解得：$x^2-kx-b=0$，所以 $x_1+x_2=k, x_1x_2=-b$

即点 $P\left(\frac{1}{2}k,-b\right)$，代入圆 D 方程得：$\frac{1}{4}k^2+(b-2)^2=1$，即 $k^2=-4b^2+16b-12\geq 0$，解得：$1\leq b\leq 3$

而 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+4b}$，易知线段 AB 的中点 $M\left(\frac{1}{2}k,\frac{1}{2}k^2+b\right)$

所以 $|PM|=\left|\frac{1}{2}k^2+2b\right|$，则 $\frac{|AB|}{|PM|}=\frac{\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+4b}}{\left|\frac{1}{2}k^2+2b\right|}=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{k^2+4b}}=2\sqrt{\frac{-4b^2+16b-11}{-4b^2+20b-12}}=2\sqrt{1-\frac{4b-1}{-4b^2+20b-12}}$

设 $t=4b-1\in[3,11]$，则 $\frac{|AB|}{|PM|}=2\sqrt{1+\frac{4t}{t^2-18t+29}}=2\sqrt{1+\frac{4}{t+\frac{29}{t}-18}}\leq 2\sqrt{1+\frac{4}{2\sqrt{29}-18}}$

当且仅当 $t=\frac{29}{t}$ 即 $t=\sqrt{29}$ 时取到等号，此时 $b=\frac{\sqrt{29}+1}{4}$，即此时点 P 的纵坐标为 $-\frac{\sqrt{29}+1}{4}$.

【点睛】
圆锥曲线中的最值与范围问题，在大题中往往采用代数法求解，需要考虑一下几个方面：①利用判别式构造不等关系，从而确定参数的取值范围；②利用隐含或已知不等关系建立不等式，求出参数取值范围；③利用基本不等式求出参数取值范围；④利用函数值域的求法，确定参数的取值范围.平常注意对各个类型的归纳总结.

22．已知函数 $f(x)=a\ln x+x(a\neq 0)$，$g(x)=\mathrm{e}^{x}+bx^{2}(b\in\mathbf{R})$.

（1）记 $h(x)=f(x)+x^{2}$，试讨论函数 $h(x)$ 的单调性；

（2）若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在 $x=1$ 处的切线都过点（0，1）.求证：当 $x>0$ 时，$f(x)+\dfrac{g(x)-1}{x}\geq \mathrm{e}-1$.

【来源】陕西省渭南市富平县 2021 届高三下学期二模理科数学试题

【答案】（1）答案不唯一，具体见解析；（2）证明见解析.

【分析】

（1）求出函数的导数，通过讨论的范围，求出函数的单调区间；

（2）求出函数的导数，计算 $f'(1),g'(1)$，求出切线方程，求出 a,b 的值，从而求出 $f(x),g(x)$ 的解析式，问题转化为证明 $\dfrac{e^{x}}{x}-\ln x-\dfrac{1}{x}-(e-1)\geq 0$，构造函数 $K(x)=\dfrac{e^{x}}{x}-\ln x-\dfrac{1}{x}-(e-1)$，求出函数的导数，根据函数的单调性证明即可.

【详解】

解：（1）$h(x)=a\ln x+x+x^{2}$，$h'(x)=\dfrac{2x^{2}+x+a}{x}(x>0)$，

记 $\varphi(x)=2x^{2}+x+a(x>0)$，

当 $a>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

当 $a<0$ 时，$\Delta=1-8a>0$，

$\varphi(x)$ 有异号的两根 $x_{1}=\dfrac{-1-\sqrt{1-8a}}{4}(<0)$，$x_{2}=\dfrac{-1+\sqrt{1-8a}}{4}(>0)$，

$\therefore x\in\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{1-8a}}{4}\right)$，$\varphi(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{1-8a}}{4}\right)$ 单调递减，

$x\in\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-8a}}{4},+\infty\right)$，$\varphi(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-8a}}{4},+\infty\right)$ 单调递减，

（2）证明：$\because f'(x)=\dfrac{x+a}{x}(x>0)$，$g'(x)=e^{x}+2bx$，

$\therefore f'(1)=a+1$，$f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-1=(a+1)(x-1)$，过点 $(0,1)$ 得：$a=-1$，

$g'(1)=e+2b$，$g(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-e-b=(e+2b)(x-1)$，过点 $(0,1)$ 得：$b=-1$，

$\therefore f(x)=-\ln x+x$，$g(x)=e^{x}-x^{2}$，

要证：$f(x)+\dfrac{g(x)-1}{x}\geq \mathrm{e}-1$，即证：$-\ln x+x+\dfrac{e^{x}-x^{2}-1}{x}\geq e-1$，

即证：$\dfrac{e^{x}}{x}-\ln x-\dfrac{1}{x}-(e-1)\geq 0$，

构造函数 $K(x)=\dfrac{e^{x}}{x}-\ln x-\dfrac{1}{x}-(e-1)$，则 $K'(x)=\dfrac{(x-1)(e^{x}-1)}{x^{2}}$，

$\because x>0$ 时，$e^{x}-1>0$，

$\therefore x\in(0,1)$ 时，$K'(x)<0$，$K(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，

$\therefore x\in(1,+\infty)$ 时，$K'(x)>0$，$K(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore K(x)\geq K(1)=0$，故原不等式成立.

【点睛】

关键点睛：本题考查导数解决函数的单调性问题，考查导数证明不等式，解决本题的关键点将证明问题变形为 $\dfrac{e^{x}}{x}-\ln x-\dfrac{1}{x}-(e-1)\geq 0$，对 $x>0$ 恒成立，对函数求导判断出单调性和最值，可得命题成立.